

Chapitre 18

Annales

18.1 2007

18.1.1 Exercice 1

Exemple 11 *Un gérant dispose d'une enveloppe de 10 millions d'Euros qu'il désire placer sur les marchés d'actions. Une première possibilité consiste à acheter un fonds indiciel répliquant parfaitement l'Eurostoxx 50, la rentabilité espérée pour cet indice étant de 10% par an et sa volatilité 15%.*

1) *On suppose que les rentabilités quotidiennes de l'Eurostoxx 50 sont i.i.d. et qu'elles suivent une loi normale. La volatilité de l'indice est estimée à 15%. Quelle serait la VaR 99% à 1 jour du portefeuille si le gérant choisissait de placer l'ensemble du capital dans le fonds indiciel (l'année comporte 250 jours de bourse) ?*

- 104000 € ;
- 217000 € ;
- 452000 € ;
- 659000 € .

*La rentabilité quotidienne de l'indice étudié suit une loi normale de moyenne annuelle $\mu' = 10\%$ et de volatilité annuelle $\sigma' = 15\%$, la VaR est ainsi donnée par $10 \cdot 10^6 (\alpha_{99\%} \sigma' - \mu') = 10^6 (2.33 * \frac{15\%}{\sqrt{250}} - \frac{10\%}{250}) = 217043$. Notons que que la formule nécessite des paramètres quotidiens !*

2) *Sachant que l'Eurostoxx 50 a affiché une perte quotidienne supérieure à 3% environ 80 fois depuis les 20 dernières années, que peut-on dire du niveau de VaR calculé à la question 1 ?*

- Il est conservateur
- Il est adapté
- Il sous-estime le risque
- On ne peut rien dire

L'indice a perdu environ 80 fois depuis les 20 dernières années, soit $\frac{80}{20 \cdot 250} = 1.6\%$ des jours, une perte quotidienne supérieure à 3%, c'est-à-dire plus de 300000€.

La perte est ainsi supérieure à la VaR 99% à 1 jour calculée précédemment, cette dernière sous-estime ainsi le risque.

3) *Afin de garantir le capital au bout de 3 ans, le gérant met en place une méthode optionnelle d'assurance de portefeuille. Il participe ainsi à la hausse de l'indice tout en évitant la baisse. En l'absence de dividendes et pour un taux d'intérêt à 3 ans de 4%, quel taux de participation à la hausse peut-il délivrer ?*

- 32%
- 45%
- 68%
- 100%

Il s'agit de mettre en place une stratégie d'assurance via des options.

On veut garantir 10 millions dans 3 ans, soit une valeur actuelle de 8.89 millions.

Introduisons :

- Un ZC de 8.89 millions ;
- Un Call à la monnaie de 3 ans de strike 10 millions, de volatilité 15% dont la valeur donne 1.63 millions d'euros.

On achète le ZC de 8.89 millions qui assure le capital ainsi que $\frac{10-8.89}{1.63} = 68\%$, le gearing est de 0.68%, c'est-à-dire que le taux de participation à la hausse que le gérant peut délivrer est de 68%.

4) En conservant les hypothèses de la question 1, que devient la VaR 99% à 1 jour si on met en place la stratégie d'assurance de portefeuille de la question 3 (on ne tient compte ni du risque de taux, ni du risque de volatilité) ?

- 104000 €
- 217000 €
- 452000 €
- 659000

Avec une stratégie d'assurance de portefeuille, la nouvelle VaR devrait être inférieure à la VaR de la question 1 où il n'y a pas d'assurance. La réponse est donc 104000€.

5) Si on souhaite prendre également en compte les risques de taux et de volatilité dans la VaR, quelle méthode de calcul faut-il utiliser de préférence ?

- La VaR historique
- La VaR paramétrique
- La VaR Monte Carlo
- Les 3 méthodes peuvent être utilisées

Monte Carlo.

6) Le gérant envisage maintenant de diversifier son portefeuille en achetant un fonds d'actions américaines. Ce fonds a une volatilité de 18% et une corrélation de 60% avec l'Eurostoxx 50. Quelle est la volatilité du portefeuille si le fonds d'actions américaines et le fonds répliquant l'Eurostoxx 50 représentent chacun la moitié de l'investissement ?

- 11,71%
- 14,77%
- 16,50%
- 18%

La volatilité du portefeuille P est la suivante

$\sqrt{\mathbb{V}(P)} = \sqrt{\mathbb{V}(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y)} = \sqrt{\frac{1}{4}\mathbb{V}(X) + \frac{1}{4}\mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y)}$ avec X représentant le fonds d'actions américaines et Y le fonds répliquant l'Eurostoxx 50. Or la covariance peut s'écrire en fonction de la corrélation $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$. Il ne reste plus qu'à combiner les quantités.

$$A.N. : \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2(15\%)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2(18\%)^2 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}0.6\sqrt{(15\%)^2(18\%)^2}\right)} = \sqrt{0.021825} = 14.77\%.$$

7) 7) Pour que cette répartition entre les actions américaines et européennes soit optimale du point de vue du gérant, il faut que la rentabilité espérée des actions américaines soit

- supérieure à 10%
- égale à 10%
- inférieure à 10%
- on ne peut pas répondre

La volatilité du portefeuille est inférieure à la volatilité de ses composantes. Pour avoir un portefeuille optimal il faudrait que son espérance soit supérieure à 10% et par conséquent avoir une rentabilité des actions américaines supérieure à 10% puisque celle de l'indice est de 10%.

8) On considère que le portefeuille défini à la question 6 est le benchmark du gérant. Celui-ci souhaite faire évoluer la composition du portefeuille en fonction de ses anticipations sur les marchés européens et américains. Quelle sur ou sous pondération maximum peut-il se permettre s'il veut conserver un niveau de Tracking Error inférieur à 2% ?

- +/- 6 %
- +/- 13 %
- +/- 18 %
- +/- 24 %

Notons z le vecteur des écarts entre les compositions des 2 portefeuilles (l'un étant le Benchmark (réparti à égalité entre les 2 fonds) et l'autre le portefeuille G du gérant de composantes g_1 et $1 - g_1$). Le vecteur $z = p - g$ est à somme nulle (la somme de ces deux composantes est nulle). Le Tracking Error est l'écart-type de la différence de rentabilité entre les 2 portefeuilles, c'est-à-dire

$TE = \sqrt{\mathbb{V}(P - G)} = \sqrt{z_1^2 * 0.18^2 + (-z_1)^2 * 0.15^2 + 2 * z_1 * -z_1 * 0.6 * 0.18 * 0.15} = \sqrt{z_1^2 * 0.0225} = 0.15z_1$, or il faut $TE < 2\%$ d'où $z_1 < \frac{2\%}{0.15} = 0.1333 = 13.33\%$. On a $z_1 = 0.5 - g_1 < 0.1333$ d'où $g_1 > 0.5 - 0.1333 = 0.36$.

Le gérant peut ainsi se permettre une pondération maximum de 13%.

9) La dernière option du gérant consiste à implémenter l'allocation active définie à la question 8 tout en garantissant le capital à 3 ans. La méthode d'assurance de portefeuille retenue est celle du coussin. Quelle est l'exposition initiale du portefeuille en actions pour un multiplicateur de 6,67 (on rappelle que le taux à 3 ans est de 4%) ?

- 27%
- 56%
- 74%
- 100%

On met en place un coussin garantissant le capital à trois ans avec un multiplicateur de 6.67, le taux à 3 ans est de 4%.

On souhaite donc garantir 10 millions dans 3 ans soit $P = \frac{10 \cdot 10^6}{(1+4\%)^3} = 8.89 \text{ €}$ en date d'aujourd'hui.

On a $V_0 = C_0 + P \Rightarrow C_0 = 1.11$ avec C_0 le coussin. Or l'on a $S_0 = mC_0$ avec S la partie risquée, d'où $S_0 = 1.1110^6 * 6.67 = 7.410^6$ ce qui entraîne une exposition initiale de 74%.

10) Quelle est la baisse maximum des marchés d'actions que peut supporter la stratégie d'assurance de portefeuille précédente avant de mettre en danger la garantie et avant que le gérant n'ait pu vendre ses positions ?

- 3%
- 6%
- 10%
- 15%

D'après la question précédente, on a $v_0 = 10$, $C_0 = 1.11$, $S_0 = 7.4$ et $P = 8.89$. Si il y a une baisse de $x\%$ des actions alors la valeur de la part risquée vaudra $S_0(1 - x)$. Le coussin vaudra

alors $C_t = V_t - P = S_t + V_0 - S_0 - P = S_0(1 - x) + V_0 - S_0 - P = -S_0x + \underbrace{V_0 - P}_{C_0}$. D'où

$$C_t = C_0 - S_0x.$$

La garantie sera en danger si le coussin devient négatif, c'est-à-dire si $C_t = C_0 - S_0x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{C_0}{S_0} = \frac{1,11}{7,4} = 0.15$.

Il y a donc danger si baisse au delà de 15 %.

18.1.2 Exercice 3

Exemple 12 Considérez les structures par terme des taux (continus) suivantes :

Echéance	1	2	3	4
Sans risque	3,50%	3,80%	4,40%	4,70%
AA	3,55%	3,90%	4,55%	4,95%

Par ailleurs, vous considérez un taux de recouvrement moyen égal à 40

1) Calculer les structures par terme des probabilités risque neutre de défaut cumulées.

On calcule aisément le spread comme la différence entre le taux AA et le taux sans risque

Echéance	1	2	3	4
Sans risque	3,50%	3,80%	4,40%	4,70%
AA	3,55%	3,90%	4,55%	4,95%
Spread	0,05%	0,10%	0,15%	0,25%

Calculons les probabilités RN de défaut cumulés via $\phi_\theta^* = \theta \frac{1}{1-\alpha} s_\theta$ avec s_θ le spread, θ l'année et ϕ_θ^* la probabilité RN cumulée implicite.

$$\begin{cases} \phi_1^* = 1 * 1.667 * 0.05\% = 0.08\% \\ \phi_2^* = 2 * 1.667 * 0.10\% = 0.33\% \\ \phi_3^* = 3 * 1.667 * 0.15\% = 0.75\% \\ \phi_4^* = 4 * 1.667 * 0.25\% = 1.67\% \end{cases}$$

Pour info calculons les probabilités RN inconditionnelles annuelles p_t^* :

$$\begin{cases} p_1^* = \phi_1^* = 0.08\% \\ p_2^* = \phi_2^* - \phi_1^* = 0.33 - 0.08 = 0.25\% \\ p_3^* = \phi_3^* - \phi_2^* = 0.75 - 0.33 = 0.42\% \\ p_4^* = \phi_4^* - \phi_3^* = 1.67 - 0.75 = 0.92\% \end{cases}$$

2) Calculer la valeur de marché d'un titre financier dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Maturité : 4 ans
- Remboursement in fine avec versement annuel des intérêts
- Valeur nominale : 100 millions
- Taux nominal : 6
- Notation de l'émetteur : AA
- En cas de défaut, le détenteur récupérera 40% du nominal

Il faut utiliser la formule $\sum_{\theta}^4 \mathbb{E}^*[X_\theta] e^{-\theta r_\theta}$ avec r_θ le taux sans risque.

Notons $\gamma_i^* = 1 - \phi_i^*$.

En effet

- Dans 1 an voici les différents flux possibles permettant de calculer $\mathbb{E}^*[X_1]$

1. 6 avec probabilité 99.92% = γ_1^*

- 2. 40 avec probabilité 0.08%
- 3. 0 avec probabilité 0%
- Dans 2 ans voici les différents flux possibles permettant de calculer $\mathbb{E}^*[X_2]$
 - 1. 6 avec probabilité 99.67% = γ_2^*
 - 2. 40 avec probabilité 0.25% = $\gamma_1^* - \gamma_2^*$
 - 3. 0 avec probabilité 0.08%
- Dans 3 ans voici les différents flux possibles permettant de calculer $\mathbb{E}^*[X_3]$
 - 1. 6 avec probabilité 99.25% = γ_3^*
 - 2. 40 avec probabilité 0.42% = $\gamma_2^* - \gamma_3^*$
 - 3. 0 avec probabilité 0.33% = 0.25% + 0.08%
- Dans 4 ans voici les différents flux possibles permettant de calculer $\mathbb{E}^*[X_4]$
 - 1. 106 avec probabilité 98.33% = γ_4^*
 - 2. 40 avec probabilité 0.92% = $\gamma_3^* - \gamma_4^*$
 - 3. 0 avec probabilité 0.75% = 0.42% + 0.33%

A.N. : $\sum_0^4 \mathbb{E}^*[X_\theta] e^{-\theta r_\theta} = 103.4398 \text{€}$.

3) Considérer un zéro-coupon promettant 100 M€ dans 2 ans qui constitue la seule dette d'une entreprise dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Valeur des actifs : 280 M€
- La volatilité des actifs : 35

a) Calculer la probabilité risque neutre de défaut de l'entreprise en utilisant le modèle de Merton.

On a $\frac{dV}{V} = rdt + \sigma_V dW^*$ et $d_2 = \frac{\ln \frac{V(0)}{D} + (r - \frac{\sigma_V^2}{2})T}{\sigma_V \sqrt{T}}$ avec $V(0) = 280M$, D la valeur du ZC dans 2 ans, soit 100, T l'échéance considérée = 2ans, $r = 3.80\%$ le taux sans risque : **Le modèle de Merton ne requiert-il pas r constant pour toutes les maturités ?**

La probabilité de défaut est $\mathbb{N}(-d_2) = 2.351\%$.

b) Calculer l'espérance de la perte due au défaut et le taux de recouvrement espéré en cas de défaut.

La dette dans 2 ans vaudra $D - \max(D - V(T), 0)$,

- Position longue sur un ZC,
- Position courte sur un put de montant $V(0)$ et de strike D

Après calcul on obtient un put de valeur 0.3452312€.¹ Ainsi l'espérance de la perte est égale à la valeur du put soit 0.3452312€.

Calcul du taux de recouvrement :

On a $\mathbb{E}[D] = D - 0.3452312 = (1 - \mathbb{N}(-d_2))D + \mathbb{N}(-d_2)\alpha D$, d'où $\alpha = \frac{\mathbb{E}[D] - D(1 - \mathbb{N}(-d_2))}{\mathbb{N}(-d_2)D}$.

On peut aussi utiliser la formule de l'Expected Loss : $EL = p_d M(1 - \alpha)$ avec p_d la probabilité de défaut calculée ci-dessus et EL l'espérance de la perte au défaut calculée ci-dessus. On en déduit la valeur du taux de récupération : $\alpha = 1 - \frac{EL}{p_d M}$.

A.N. : $\alpha = 85.3127$. **Le raisonnement est-il bon ?**

1. Si l'on utilise la macro de l'enseignant GFN204 il faut prendre un taux discret pour le calcul, soit $e^{3.80\%} - 1$; sur la TI89 on prendra un taux continu soit 3.80%.